

非均匀强激光场下正负电子对的产生

落彩青, 任云亮, 吾拉依木江·司提瓦力地

(新疆大学 物理科学与技术学院, 乌鲁木齐 830046)

摘要: 随着强激光技术领域的不断突破,使得能量转化成物质的施温格过程的实验指日可待. 在这样的背景下,在接近实际强激光的模型中理论研究施温格效应至关重要. 本文采用量子场论模拟方法在非均匀电场中研究施温格效应的空间特性. 首先,发现在能量保持不变的情况下电场的空间尺度显著影响正负电子对的产生率、动量和空间分布. 正负电子对的动量和空间分布显示,当电场的空间尺度增大时,因为电场强度变小,所以产生的正负电子对无法及时被分开,抑制正负电子对的产生. 最后,用连续性方程研究正负电子对的产生位置分布,发现正负电子对的产生位置分布与电场强度分布是对应的,电子和正电子的产生位置分离一个康普顿波长. 此研究结果展示了施温格效应的空间特性,同时解释了弱电场下施温格效应的抑制机制. 这些结论在人们常采用的均匀电场近似研究中无法得到. 我们的研究对检测施温格实验中的正负电子对具有重要的指导意义.

关键词: 强激光; 施温格效应; 量子场论模拟方法; 非均匀电场; 空间分布

中图分类号: O431.2

文献标志码: A

DOI: 10.19855/j.1000-0364.2025.025001

Pair production under inhomogeneous strong laser

LUO Cai-Qing, REN Yun-Liang, IBRAHIM Sitiwaldi

(Department of Physics, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: With the fast development of strong field technology, it is possible to hold an experiment in the near future to test the Schwinger effect. Therefore, theoretical studies on the Schwinger effect are essential to support the upcoming experiment. In this paper, we use quantum field theory simulation method to study the spatial feature of the Schwinger effect in a non-uniform electric field. It is found that the spatial width of the electric field significantly affects the production rate, momentum spectrum and spatial spectrum of electron-positron pairs while the energy remains constant. The momentum and spatial spectra of electron-positron pairs show that when the spatial width of the electric field increases and the electric field intensity is less than the Schwinger threshold, the produced electron-positron pairs cannot be separated in time, which suppress the generation of the electron-positron pairs. At last, the continuity equation is used to calculate the location-based production rate, which shows that the production position distribution of electron-positron pairs corresponds to the electric field intensity distribution, and the final distribution position of electron and positron is separated by one Compton wavelength. These results show the spatial characteristics of Schwinger effect, and explain the suppression mechanism of Schwinger effect under a weak electric field.

Key words: Strong laser; Schwinger effect; Quantum field theoretical simulations; Inhomogeneous electric field; Spatial spectrum

收稿日期: 2023-06-16

基金项目: 国家自然科学基金(11847160)

作者简介: 落彩青(1996—), 女, 硕士研究生, 从事强激光物理研究. E-mail: luocq2021@stu.xju.edu.cn

通信作者: 吾拉依木江·司提瓦力地. E-mail: ibrahim010@sina.com

1 引言

在 20 世纪 60 年代时，历经四十多年的探究历程，Maiman 的第一台激光器——红宝石激光器^[1, 2]研制成功后，可使用的激光强度快速发展。由于激光的相干性好，能量高，所以一直备受科学家的青睐。在第一台激光器研制成功后的这段时间内，由于可以达到的强度的增加非常快，所以物理学家们已经预测到由自由电子或者真空非线性的相对论性主导的新型光学即将出现，并且就在这时发现了很多与非线性光学有关的结论。在量子场论框架中，量子电动力学(QED)是最成熟的一个分支内容，把量子力学和狭义相对论非常完美的结合在一起进行研究，用于描述能量与物质相互作用的过程。

从图 1 中我们可以看到，从 TW 至 PW 的高功率、高能量短脉冲激光已经出现(1TW = 10¹² W, 1PW = 10¹⁵ W)，更高功率和能量的激光设备也在不断规划着。接下来我们介绍一些提高激光强度的实验。首先，当前欧盟正在建造的光学装置 ELI - NP^[3]，为科学界的研究提供了高功率激光系统，它的超高功率超短脉宽激光聚焦功率有可能达到 10²³ W/cm²^[4]。其次，在欧洲的 ELI 计划^[5, 6]完成后，激光的强度可达到 10²⁴ W/cm²，ELI 计划的完成离不开欧洲的 ELI 大型激光设施^[7, 8]，它是由四部分设备组成：一部分是研究次级束辐射和高能粒子^[9]的，建在捷克共和国，一部分是研究阿秒物理^[10]的，建在匈牙利，一部分是研究核物理^[11]的，建在罗马尼亚，最后一部分是研究超强激光物理的，目前建设地点还没有确定。超强激光设备是通过用多束周期是一分钟且功率可以达到 100 - 200 PW 的单束激光相位组合产生的高强度激光脉冲，激光强度有望超过 10²⁵ W/cm²^[12]。最后，是英国中央研究所在项目计划中设计的激光器，强度可达 10²⁶ W/cm²。

我们国家的激光设施发展也是突飞猛进，有很多装置的实验水平也是走在世界前列。例如神光 3 号激光装置，是净输出功率最高的装置，目标是在不久的将来建成单光束功率就能达到万焦耳，并且能够输出 60 束这样光的设备；正在上海建设的 SEL100PW 激光设备，强度有望达到 10²³ - 10²⁴ W/cm²。

在强电场下真空中产生正负电子对——施温格效应是量子电动力学令人着迷的预言之一。因

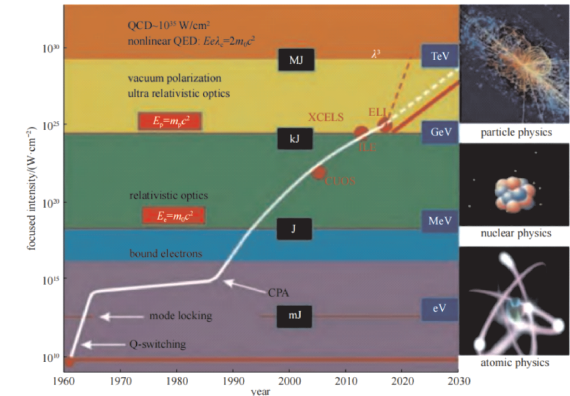


图 1 能量不断提高中的强激光^[13]

Fig. 1 Strong laser with continuously increasing energy^[13]

为所需要的能量密度 10²⁹ W/cm² 很高，所以施温格效应目前为止没有得到实验的验证。如今，在强激光技术不断的取得突破的背景下，能量转换成物质的实验变得指日可待。为了更好的指导和理论支持即将进行的施温格实验，在本论文中我们研究具有空间分布的强激光下的施温格效应。我们重点讨论电场的空间分布特性对产生的粒子密度和动量谱的影响。

2 研究方法

对于真空中产生正负电子对这一研究，常用的研究方法有很多，比如量子场论模拟方法^[14 - 20]、量子 Vlasov 方程^[21 - 27]、世界线瞬子技术^[28 - 34]等等。为了计算结果更接近于实际电场，所以我们在计算过程中电场的形状和大小都是考虑的因素。因此，我们本文采用的是可以计算任意时间任意空间中正负电子对产量的量子场论模拟方法，模拟过程通过 FORTRAN 程序来实现。

我们先引入描述真空的 Dirac 方程：

$$i\partial\hat{\varphi}(z,t)/\partial t = [\sigma_1\hat{p}_z + \sigma_3m + V(z,t)]\hat{\varphi}(z,t), \tag{1}$$

其中， p_z 和 m 是电子的动量和静态质量。我们只考虑一维空间中正负电子对的产生，在这种情况下，Dirac 矩阵约化为 Pauli 矩阵。Dirac 算符展开为正负能态和产生湮灭算符的形式：

$$\hat{\varphi}(z,t) = \sum_p \hat{b}_p(t) W_p(z) + \sum_n \hat{d}_n^\dagger(t) W_n(z), \tag{2}$$

$$\hat{\varphi}(z,t) = \sum_p \hat{b}_p(t=0) W_p(z,t) + \sum_n \hat{d}_n^\dagger(t=0) W_n(z,t), \tag{3}$$

其中， $W_p(z)$ 和 $W_n(z)$ 分别是正能态和负能态的

电子波函数, $\hat{d}_n^\dagger(z)$ 和 $\hat{b}_p(z)$ 分别表示产生和湮灭算符. 我们计算随时间变化的产生和湮灭算符, 用量子力学的 Dirac 方程进行演化计算,

$$\hat{b}_p(t) = \sum_{p'} \hat{b}_{p'}(t=0) \langle p | U(t) | p' \rangle + \sum_{n'} \hat{d}_{n'}^\dagger(t=0) \langle p | U(t) | n' \rangle, \tag{4}$$

$$\hat{d}_n^\dagger(t) = \sum_{p'} \hat{b}_{p'}(t=0) \langle n | U(t) | p' \rangle + \sum_{n'} \hat{d}_{n'}^\dagger(t=0) \langle n | U(t) | n' \rangle. \tag{5}$$

这里的产生湮灭算符具有反对易关系, 所以我们需要采用劈裂算符方法进行计算. 时间演化算符 $\hat{U}(t)$ 可以表示为:

$$\hat{U}(t) = \hat{T} \exp \left[-i \int_0^t dt' [\hat{h}_0 + V(z, t')] \right]. \tag{6}$$

通过占有数算符得到产生电子的空间密度分布函数和电子的电荷流密度:

$$\rho(z, t) = \sum_n \left| \sum_p \langle p | U(t) | n \rangle W_p(z) \right|^2, \tag{7}$$

$$j(z, t) = \sum_n \left| \sum_p \langle p | U(t) | n \rangle \sigma_1 W_p(z) \right|^2. \tag{8}$$

对空间进行积分, 得到产生粒子的总量:

$$N(t) = \int dz \rho(z, t) = \sum_{p,n} |\langle p | U(t) | n \rangle|^2 \tag{9}$$

3 研究内容

我们用量子场论模拟方法在不同空间尺度的静电场下演化电子真空. 我们采用的电场的电势是分布在一维 z 空间的对称 Sauter 势井:

$$V(z) = \frac{V}{2} \left[\tanh\left(\frac{z - z_c}{W}\right) - \tanh\left(\frac{z + z_c}{W}\right) \right], \tag{10}$$

其中, V 是电势的高度, W 是电场的有效宽度, $\pm z_c$ 是电场的中心坐标. 对称势井对应的电场分布是:

$$E(z) = E \left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{z - z_c}{W}\right) - \operatorname{sech}^2\left(\frac{z + z_c}{W}\right) \right], \tag{11}$$

其中, $E = V/(2W)$ 是中心电场强度. 为了尽量减少电场突然打开引起的微扰正负电子对产生, 我们通过光滑的函数控制, 使电场打开过程缓慢且连续变化. 我们分别用电子的静止能量 m 和康普顿波长 $\lambda_c = 1/m$ 作为动量(能量)和长度的单位.

图 2 中我们展示了不同电势高度下正负电子

对产生率(单位时间内产生的正负电子对)随电场有效宽度 W 的变化曲线. 随着电势 V 的减小, 正负电子对产生率迅速下降. 当电势小于能量阈值 $2m$ 的时候($V = 1.9m$)产生的正负电子对几乎为零. 我们看到, 当电场宽度 W 小于康普顿波长时, 宽度的变化对产生率几乎没有影响. 电场宽度达到或者超过一个康普顿波长时正负电子对产生率迅速下降. 这充分体现了康普顿波长作为施温格隧穿过程的特征长度.

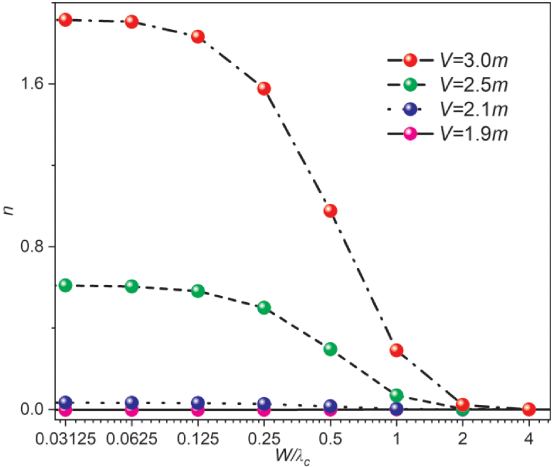


图 2 不同电势下宽度和产率的关系
Fig. 2 The relationships between width and yield at different potentials

图 3 展示的是产生的电子空间分布在整个时间轴等间隔 50 次的快照. 通过比较这四张图我们发现在不同的电场宽度下产生的电子空间分布有非常大的区别. 首先, 电子的密度在电场的中心位置最高. 这说明正负电子对大部分以零动量产生. 电场中心位置的电子密度没有随时间变化, 这说明在这个位置正负电子对的产生率和粒子流密度达到平衡的状态. 图(c)和图(d)中初始阶段出现了较高密度的峰, 这是因为在这两张图中电场的宽度很宽, 电场打开阶段的微扰产生的正负电子对比例比较大. 从这一点我们可以看出相比于微扰过程, 非微扰过程对电场的强度更敏感一些. 空间分布的边缘随时间往右(电场对电子的作用力方向)扩散. 我们通过计算可以发现这个扩散速度接近光速. 比如, 左上角的图(a)中, 电子分布边缘从 $z = 25 \lambda_c$ 的位置扩散到 $z = 0$ 的位置, 所花的时间为 $26 \tau_c$. 这说明部分电子动量很高的同时也说明我们的演化方法没有违背相对论. 在图(c)中我们注意到峰的右侧在 z 方向电子的分布面有波动行为, 这可以看作是由于亚临界的电场强度的真空波动所引起的. 在图(d)中峰右侧

45 度光锥以外的地方电子密度几乎为零，指出了电场完全打开后几乎再没有正负电子对产生. 电场宽度较大时，在电场中心峰位置的电子即使受

到电场力的加速也没有往右移动，这说明电场中心的电子处于产生与湮灭的平衡状态.

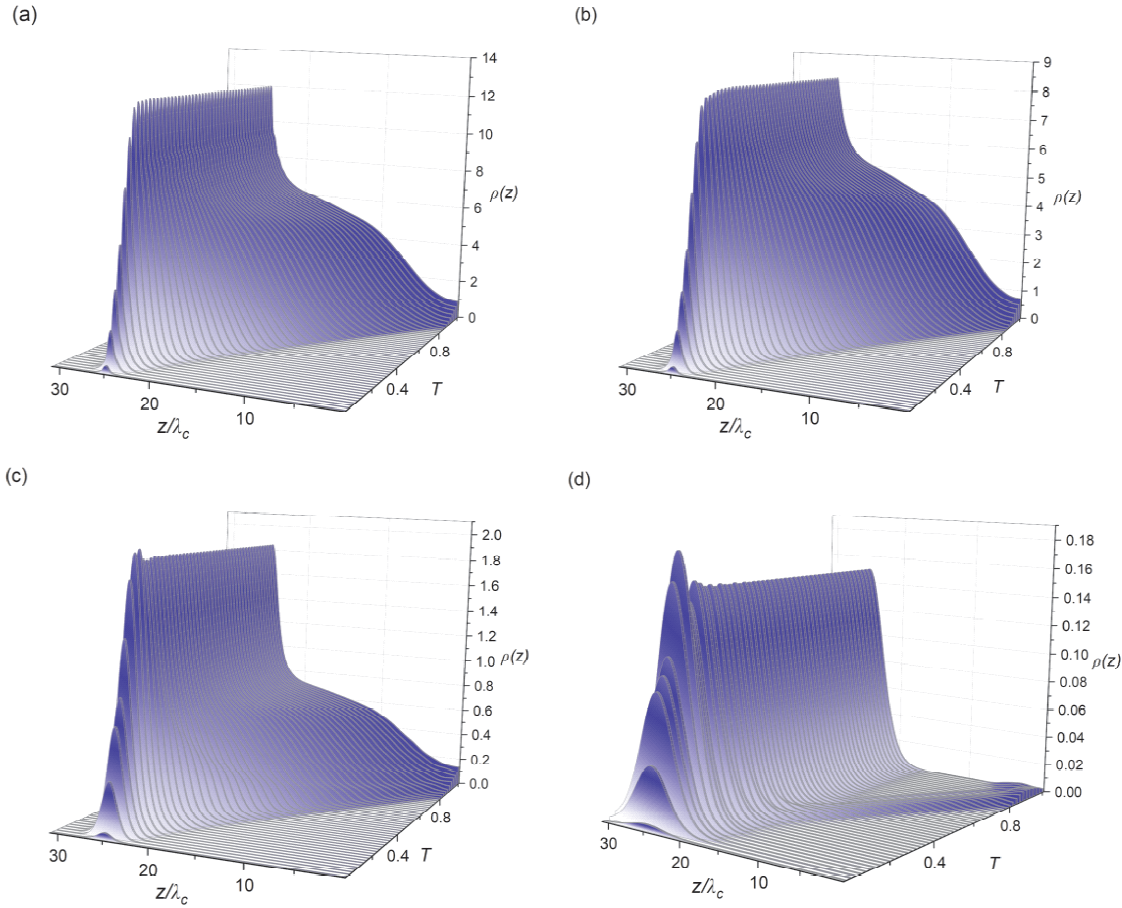


图3 电势 $V = 2.5m$ 时不同宽度下电子的空间分布图: (a) 宽度 $W = 0.00001 \lambda_c$, (b) 宽度 $W = 0.25 \lambda_c$, (c) 宽度 $W = 1 \lambda_c$, (d) 宽度 $W = 4 \lambda_c$.

Fig. 3 The spatial distributions of electrons with different widths at electric potential $V = 2.5m$: (a) the electric field spatial width is $0.00001 \lambda_c$, (b) the electric field spatial width is $0.25 \lambda_c$, (c) the electric field spatial width is $1 \lambda_c$, (d) the electric field spatial width is $4 \lambda_c$.

图4 中比较在电场宽度 W 为 $5 \lambda_c$ 和 $10 \lambda_c$ 下产生的电子和正电子的空间和动量分布. 首先比较产生的正负电子, 我们发现电子和正电子的空间分布不一样, 一方面是因为动量守恒要求正负电子对产生的动量相反, 另一方面正负电子对产生后受到电场力的加速方向也相反. 产生的正负电子对的动量表现出一致的分布, 这也是动量守恒的结果.

接下来比较不同的电场宽度, 我们发现当 $W = 5 \lambda_c$ 时正电子在自己的有效分布范围内比较均匀, 两侧电场中产生的电子会合在坐标中心. 当 $W = 10 \lambda_c$ 时, 因为电场减少至原来的一半, 正负电子对的空间分布下降一个数量级. 和宽度无关, 正负电子对主要分布在电场的位置. 不同宽度的

动量分布差距很明显. 当 $W = 5 \lambda_c$ 时, 动量分别在 0 和 $\pm 5m$ 的位置成峰, 中间的峰反应产生率最优的动量(零动能), 两侧的峰对应的粒子密度反映电场对产生的粒子的加速. 当 $W = 10 \lambda_c$ 时, 动量分布两侧的峰迅速下降, 反应产生的粒子基本处在电场的位置, 并且产生湮灭处于平衡态, 很少被电场加速分开形成正负电子对.

图3 和图4 说明, 在电场外的电子密度下降幅度明显大于在电场内的电子密度的下降幅度. 这很好的说明弱电场中施温格效应抑制的机制: 由于电场太弱, 产生的正负电子无法被分开.

上面我们讨论了产生的正负电子对的分布特点. 接下来我们按照经典的连续性方程用粒子的空间分布式(7)和电流密度式(8)研究正负电子对

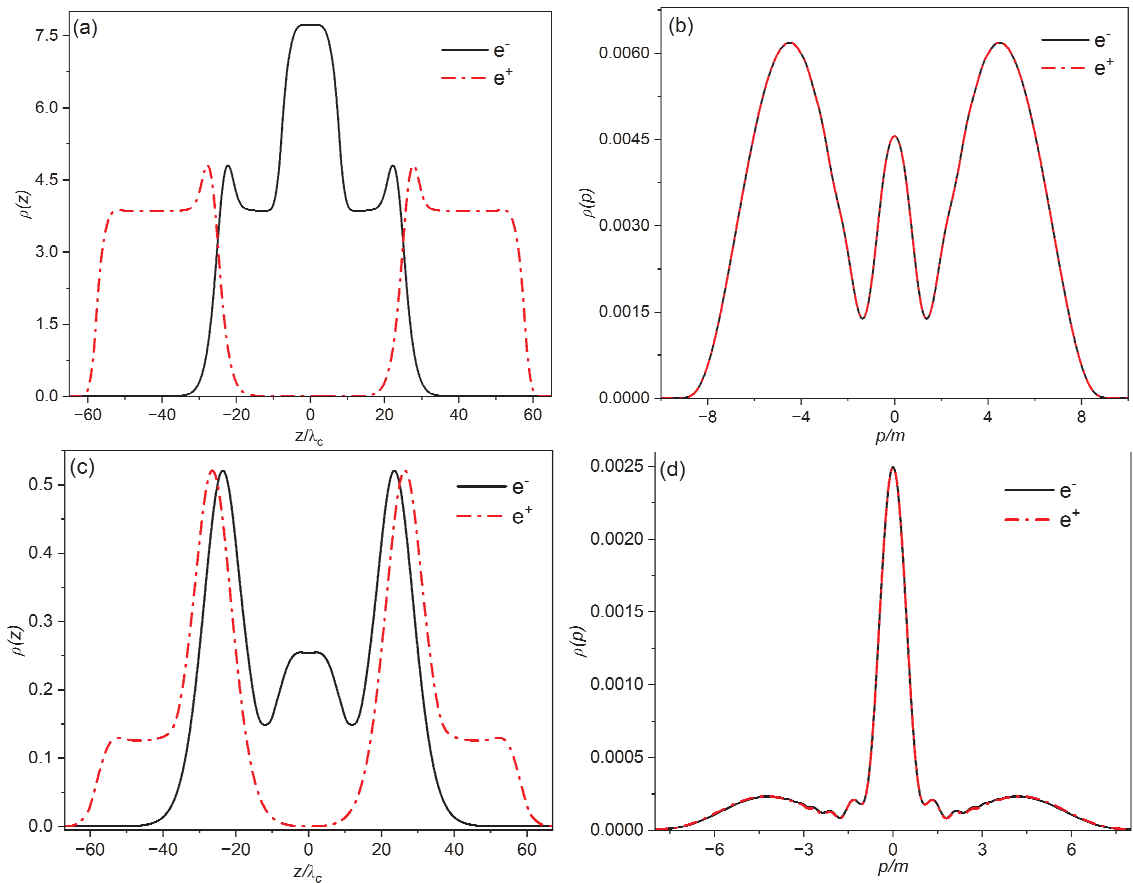


图 4 不同宽度下电子和正电子的空间和动量分布图: (a)(b) 宽度 $W = 5 \lambda_c$, (c)(d) 宽度 $W = 10 \lambda_c$.
Fig. 4 The spatial and momentum distributions of electrons and positrons at different widths: (a)(b) the electric field spatial width is $5 \lambda_c$, (c)(d) the electric field spatial width is $10 \lambda_c$.

的产生位置. 按照连续性方程, 粒子数守恒的情况下粒子流的散度等于粒子密度的变化:

$$\frac{d}{dt}\rho(z,t) + \frac{d}{dz}j(z,t) = 0, \tag{12}$$

粒子的产生和湮灭连续性方程为:

$$\Gamma(z,t) = \frac{d}{dt}\rho(z,t) + \frac{d}{dz}j(z,t), \tag{13}$$

其中, $\Gamma(z,t)$ 表示在坐标 z 时刻 t 的粒子产生(湮灭)率(正值为产生, 负值为湮灭), 我们要注意它和粒子位置分布 $\rho(z,t)$ 的区别.

图 5 比较电子和正电子的产生位置分布 $\Gamma(z,t)$ 和粒子最后的位置分布 $\rho(z,t)$. 我们发现电子和正电子的分布是按照它们的电荷相反左右对称分布的. 产生的电子的位置 $\rho(z,t)$ 主要分布在电场的左侧, 正电子则在右侧. 然而正负电子的产生位置主要分布在电场内部, 随着电场强度的下降而迅速下降. 电子的产生位置往左偏移了一个康普顿波长, 而正电子的位置往右偏移了一个康普顿波长, 这是施温格隧穿过程的特征长度. 同时我们发现离电场中心位置 $18 \lambda_c$ 的位置(电子的

在 $z = 21 \lambda_c$ 、正电子的在 $z = 57 \lambda_c$) 有一个振荡出现, 是由亚临界场引起的真空波动所导致的.

4 结 论

在本论文我们研究了强激光场提供的空间依赖的静电场中的施温格效应. 我们采用量子场论模拟方法, 在一维空间中进行了模拟演化. 首先, 我们研究了在相同的能量下电场空间宽度对正负电子对产生率的影响. 我们发现, 当电场宽度小于康普顿波长的时候, 电场宽度对施温格效应的影响非常小; 当电场宽度大于康普顿波长时正负电子对产生率指数函数式下降.

再次, 我们研究了在不同空间宽度下产生的电子空间分布随时间的演化. 我们发现电场宽度较大的时候, 电子的移动速度被光速限制(移动速度不能超过光速), 并且电场内的电子密度不会随时间变化. 同时我们发现当电场宽度变大, 电场强度小于施温格阈值的时候产生的电子主要分布在电场中, 很少被电场加速离开电场.

最后我们比较了在不同宽度下的电子和正电子

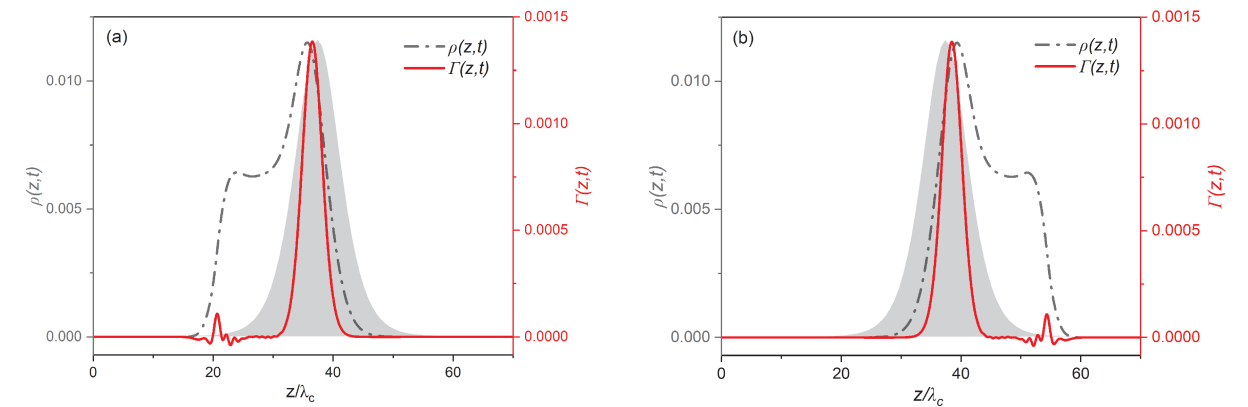


图5 宽度 $W = 5 \lambda_c$ 时粒子的产生位置及最后位置分布图(灰色为电场区域): (a) 电子; (b) 正电子

Fig. 5 Distributions of the particle production and the final position as the electric field width is $5 \lambda_c$ (the gray area represents the electric field area): (a) electrons, (b) positrons

的空间分布、动量分布和产生位置. 我们发现电子和正电子的动量分布是一致的, 但是空间分布是不一致的. 同时我们发现电场的宽度对粒子的动量和空间分布有显著的影响. 我们指出, 当电场宽度很宽使得电场强度小于施温格阈值的时候在电场中的电子密度减少不明显, 但是被电场加速分开的正负电子对数量显著下降. 这很好的解释了电场强度对施温格效应的关键作用. 我们的研究结果对强激光下的施温格效应实验具有重要的指导意义.

参考文献:

[1] Tong J W, Li H Q, Wang S B, *et al.* Investigation and progress of dynamic photomechanics measurement based on ruby pulse laser[J]. *J. Exp. Mech.*, 2011, 26: 518 (in Chinese) [佟景伟, 李鸿琦, 王世斌等. 红宝石脉冲激光动态光力学方法研究与进展[J]. 实验力学, 2011, 26: 518]

[2] Chen C B, Sun H Q. Experiencing hardships and innovating with determination – Development of China’s first Ruby laser[J]. *Chin. J. Hist. Sci. Technol.*, 2009, 30: 347 (in Chinese) [陈崇斌, 孙洪庆. 历尽艰辛 锐意创新—中国第一台红宝石激光器的研制[J]. 中国科技史杂志, 2009, 30: 347]

[3] Tanaka K, Spohr K, Balabanski D, *et al.* Current status and highlights of the ELI – NP research program[J]. *Matter Radiat. Extremes*, 2020, 5: 024402.

[4] Peng H S. High power ultra short pulse laser and novel physical phenomena [J]. *High Power Laser Part. Beams*, 2000, 12: 6 (in Chinese) [彭翰生. 高功率超短脉冲激光与新奇物理现象[J]. 强激光与粒子束, 2000, 12: 6]

[5] Edwards C, Amiranoff F. HiPER: the European path

to laser energy[J]. *Eur. Phys. J. Conf.*, 2013, 59: 01006.

[6] Clery D. Taking laser science to the extreme[J]. *Science*, 2010, 328: 806.

[7] Feder T. Megalasers to pulse in several new EU countries[J]. *Phys. Today*, 2010, 63: 20.

[8] Di Piazza A, Müller C, Hatsagortsyan K, *et al.* Extremely high – intensity laser interactions with fundamental quantum systems[J]. *Rev. Mod. Phys.*, 2012, 84: 1177.

[9] Wu H S, Zhang Y. New US laser driving technology is expected to change the game rules in the field of high – energy particle accelerator [J]. *Foreign Nucl. News*, 2022, 11: 15 (in Chinese) [伍浩松, 张焰. 美新型激光驱动技术有望改变高能粒子加速器领域游戏规则[J]. 国外核新闻, 2022, 11: 15]

[10] Wang Y L, Yan X Q. Research progress in the generation of isolated attosecond pulses by the interaction of intense laser with solid density plasma[J]. *Acta Phys. Sin.*, 2023, 72: 74 (in Chinese) [王云良, 颜学庆. 强激光与固体密度等离子体作用产生孤立阿秒脉冲的研究进展[J]. 物理学报, 2023, 72: 74]

[11] Zhang Y H, Wang M. Frontiers and new opportunities in modern nuclear physics research[J]. *Chin. Sci. Bull.*, 2021, 66: 3515 (in Chinese) [张玉虎, 王猛. 现代核物理研究前沿和新机遇[J]. 科学通报, 2021, 66: 3515]

[12] Li Z L. Research and progress on dynamical methods for generating positive and negative electron pairs in vacuum under ultrastrong fields [J]. *Prog. Phys.*, 2016, 36: 28 (in Chinese) [李子良. 超强场下真空产生正负电子对的动理学方法研究及其进展[J]. 物理学进展, 2016, 36: 28]

[13] Gong C, Li Z L, Li Y J. Research progress on parti-

- cle pair generation in vacuum under strong field conditions[J]. *High Power Laser Part. Beams*, 2023, 35: 17 (in Chinese) [龚驰, 李子良, 李英骏. 强场下真空中粒子对产生的研究进展[J]. *强激光与粒子束*, 2023, 35: 17]
- [14] Jiang M, Lv Q Z, Sheng Z M, *et al.* Enhancement of electron – positron pair creation due to transient excitation of field – induced bound states[J]. *Phys. Rev. A*, 2013, 87: 042503.
- [15] Jiang M, Su W, Lv Z Q, *et al.* Pair creation enhancement due to combined external fields[J]. *Phys. Rev. A*, 2012, 85: 033408.
- [16] Cheng T, Su Q, Grobe R. Introductory review on quantum field theory with space – time resolution[J]. *Contemp. Phys.*, 2010, 51: 315.
- [17] Krekora P, Cooley K, Su Q, *et al.* Creation dynamics of bound states in supercritical fields[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95: 070403.
- [18] Lv Q Z, Liu Y, Li Y J, *et al.* Noncompeting channel approach to pair creation in supercritical fields[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, 111: 183204.
- [19] Liu Y, Jiang M, Lv Q Z, *et al.* Population transfer to supercritical bound states during pair creation[J]. *Phys. Rev. A*, 2014, 89: 012127.
- [20] Tang S, Xie B S, Lu D, *et al.* Electron – positron pair creation and correlation between momentum and energy level in a symmetric potential well[J]. *Phys. Rev. A*, 2013, 88: 012106.
- [21] Otto A, Seipt D, Blaschke D, *et al.* Dynamical Schwinger process in a bifrequent electric field of finite duration: survey on amplification[J]. *Phys. Rev. D*, 2015, 91: 105018.
- [22] Li Z L, Lu D, Xie B S, *et al.* Enhanced pair production in strong fields by multiple – slit interference effect with dynamically assisted Schwinger mechanism[J]. *Phys. Rev. D*, 2014, 89: 093011.
- [23] Kluger Y, Eisenberg J M, Svetitsky B, *et al.* Pair production in a strong electric field[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, 67: 2427.
- [24] Kohlfürst C, Mitter M, Von Winckel G, *et al.* Optimizing the pulse shape for Schwinger pair production[J]. *Phys. Rev. D*, 2013, 88: 045028.
- [25] Kohlfürst C, Gies H, Alkofer R. Effective mass signatures in multiphoton pair production[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, 112: 050402.
- [26] Huet A, Kim S P, Schubert C. On the Vlasov equation for Schwinger pair production in a time – depend[J]. *Phys. Rev. D*, 2014, 90: 125033.
- [27] Akal I, Villalba – Chávez S, Müller C. Electron – positron pair production in a bifrequent oscillating electric field[J]. *Phys. Rev. D*, 2014, 90: 113004.
- [28] Linder M F, Schneider C, Sicking J, *et al.* Pulse shape dependence in the dynamically assisted Sauter – Schwinger effect[J]. *Phys. Rev. D*, 2015, 92: 085009.
- [29] Dunne G V, Schubert C. Worldline instantons and pair production in inhomogenous fields[J]. *Phys. Rev. D*, 2005, 72: 105004.
- [30] Dunne G V, Wang Q H, Gies H, *et al.* Worldline instantons and the fluctuation prefactor[J]. *Phys. Rev. D*, 2006, 73: 065028.
- [31] Dunne G V, Wang Q H. Multidimensional worldline instantons[J]. *Phys. Rev. D*, 2006, 74: 065015.
- [32] Dumlu C K, Dunne G V. Complex worldline instantons and quantum interference in vacuum pair production[J]. *Phys. Rev. D*, 2011, 84: 125023.
- [33] Ilderton A. Localisation in worldline pair production and lightfront zero – modes[J]. *J. High Energy Phys.*, 2014, 2014: 166.
- [34] Ilderton A, Torgrimsson G, Wardh J. Nonperturbative pair production in interpolating fields[J]. *Phys. Rev. D*, 2015, 92: 065001.